Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ (2x + 3y)^2 = 1 \end{cases}$$

jest równoważny alternatywie dwóch układów:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$

Każdy z tych układów rozwiązuje się np. metodą podstawiania, wyliczając z drugiego (liniowego) równania jedną z niewiadomych i podstawiając do drugiego.

Interpretacja geometryczna układu jest następująca: pierwsze równanie $2x^2 + 3y^2 = 1$ przedstawia elipsę o półosiach $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Drugie równanie $(2x + 3y)^2 = 1$ przedstawia układ dwóch prostych: $2x + 3y = 1$, $2x + 3y = -1$, równoległych i symetrycznych względem początku układu. Odległość rozważanych prostych od początku układu jest jest mniejsza od długości jednej z półosi, więc układ ma cztery rozwiązania. Są to pary:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(1 - \sqrt{6}) \\ y = \frac{1}{15}(3 + 2\sqrt{6}), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}(1 + \sqrt{6}) \\ y = \frac{1}{15}(3 - 2\sqrt{6}), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-1 - \sqrt{6}) \\ y = \frac{1}{15}(-3 + 2\sqrt{6}), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-1 + \sqrt{6}) \\ y = \frac{1}{15}(-3 - 2\sqrt{6}). \end{cases}$$

Zadanie 2. Pokażemy, że poszukiwanym równoległobokiem jest kwadrat o boku $\sqrt{S}$. Wystarczy wykazać tezę przy założeniu $S = 1$. Niech x i y oznaczają boki równoległoboku i niech h oznacza wysokość do boku x. Wtedy $h = \frac{1}{x}$ i oczywiście $y \geq h$. Wystarczy pokazać, że $2x + 2y \geq 4$. Mamy:

$$2x + 2y \geq 2x + 2\frac{1}{x} = 4\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 4 \cdot 1 = 4.$$

Zadanie 3. Jeżeli wierzchołki mają współrzędne nieparzyste, to środki boków trójkąta mają współrzędne całkowite, a zatem każda ze środkowych jest przeciwprostokątną trójkąta o całkowitych przyprostokątnych.

Zadanie 4. Jeżeli płaszczyzna w przekroju z sześcianem daje trójkąt, to nie może przecinać dwóch krawędzi równoległych, bo wtedy musiała by przeciąć jeszcze dwie krawędzie. Zatem wierzchołki trójkąta ABC leżą na trzech krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka O. Niech $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AB = p$, $BC = q$ i $CA = r$. Mamy:

$$p^2 + r^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2 > b^2 + c^2 = q^2,$$

co wobec symetrii kończy dowód. W rozumowaniu zastosowaliśmy kryterium: *trójkąt jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego z jego boków jest mniejszy od sumy kwadratów dwóch pozostałych boków.*

Tezę można uzasadnić stosując inne kryterium: *trójkąt ABC jest ostrokątny, gdy każda z wysokości pada na bok a nie na jego przedłużenie.* Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta OBC poprowadzoną z wierzchołka O. Zatem D leży na boku BC, bo trójkąt OBC jest prostokątny. Ale OD jest rzutem prostokątnym odcinka AD na płaszczyznę OBC. Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że AD jest prostopadły do BC, czyli AD jest wysokością ABC.