Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap szkolny 2014/15

Przykładowe rozwiązania zadań

Poniżej prezentujemy przykładowe rozwiązania zadań etapu szkolnego Tarnowskiego Turnieju Matematycznego w roku 2014/15.

Zadanie 1. Znaleźć liczbę czterocyfrową, której dwie pierwsze cyfry są jednakowe, dwie ostatnie cyfry są jednakowe i która jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Niech $x = 1000a + 100a + 10b + b$ będzie szukaną liczbą, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, spełniającymi nierówności $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Zauważmy, że liczba x jest podzielna przez 11, gdyż

$$x = 1100a + 11b = 11(100a + b).$$

Skoro liczba x jest kwadratem liczby całkowitej i jest podzielna przez 11, to musi być podzielna przez 11^2. Zatem liczba $100a+b = 99a+(a+b)$ jest podzielna przez 11. Wynika stąd, że suma $a + b$ jest podzielna przez 11, a ponieważ $0 < a + b \leq 18$, więc $a + b = 11$. Wobec tego $x = 11^2(9a + 1)$. Wnosimy stąd, że $9a + 1$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej m, czyli

$$9a + 1 = m^2.$$

Ponieważ $9a + 1 \leq 82$, więc $m \leq 9$. Wobec tego

$$9a = (m + 1)(m - 1).$$

Z równości tej wynika, że iloczyn $(m + 1)(m - 1)$ jest podzielny przez 9, a ponieważ co najwyżej jedna z liczb $m+1$ i $m-1$ jest podzielna przez 3, więc jedna z nich jest podzielna przez 9. Biorąc pod uwagę, że liczba naturalna m jest mniejsza niż 10, wnioskujemy, że $m + 1 = 9$, zatem $m = 8$. W takim razie $a = 7$, $b = 4$. Stąd jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest więc liczba $7744 = 88^2$. $\square$

Zadanie 2. Wykazać, że suma kwadratów odległości wierzchołków kwadratu od prostej przechodzącej przez jego środek nie zależy od położenia tej prostej.

Rozwiązanie. Rozważmy kwadrat $KLMN$ o boku a oraz jego przekątne KM i LN, przecinające się w punkcie O. Rozważmy dowolną prostą przechodzącą przez środek kwadratu i przecinającą prostą MN w punkcie P. Niech A, B, C, D będą rzutami prostopadłymi punktów L, K, M, N na prostą OP. Wystarczy pokazać, że

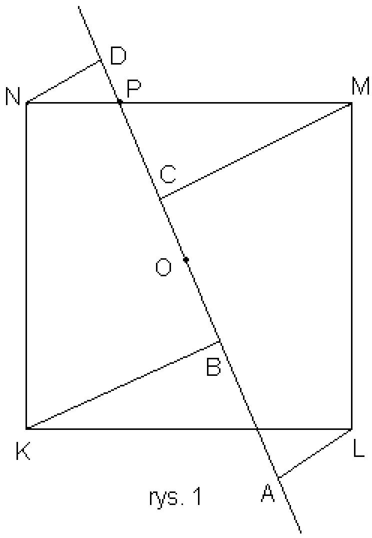
$$AL^2 + BK^2 + CM^2 + DN^2 = a^2$$

niezależnie od położenia punktu P na prostej MN (rys. 1). Zauważmy, że trójkąty: ALO, CMO, DNO, BKO (rys. 2) są przystające, zatem $BK = AO$ i $CM = DO$. Wobec tego

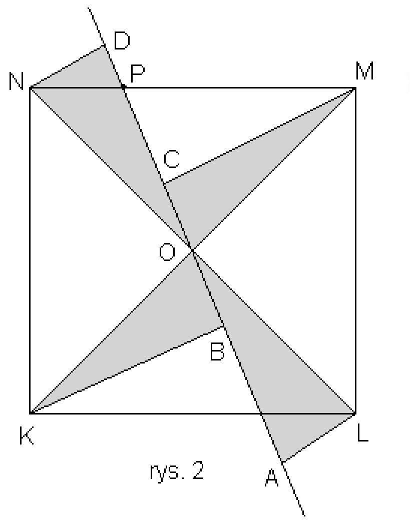
$$AL^2 + BK^2 = AL^2 + AO^2 = LO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Podobnie

$$DN^2 + CM^2 = DN^2 + DO^2 = NO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$



rys. 1



rys. 2

Wobec tego

$$AL^2 + BK^2 + DN^2 + CM^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2.$$

Nietrudno sprawdzić, że w przypadku, gdy prosta ta jest równoległa do boku MN, suma $AL^2 + BK^2 + DN^2 + CM^2$ także równa jest a^2. Stąd suma $AL^2 + BK^2 + DN^2 + CM^2$ nie zależy od położenia prostej OP. $\square$

Zadanie 3. Dany jest trójkąt o wysokościach $h_1 = 156, h_2 = 65, h_3 = 60$. Wykazać, że trójkąt ten jest prostokątny.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że wysokości $156, 65, 60$ zostały poprowadzone do boków odpowiednio a, b, c. Oznaczmy pole tego trójkąta przez S. Wtedy

$$a = \frac{2S}{156}, \quad b = \frac{2S}{65}, \quad c = \frac{2S}{60}.$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{60}{156}\right)^2 + \left(\frac{60}{65}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1,$$

czyli $a^2 + b^2 = c^2$. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt o bokach a, b, c jest więc prostokątny. $\square$

Zadanie 4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a &= bcd \\ a+b &= cd \\ a+b+c &= d \\ a+b+c+d &= 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Załóżmy, że czwórka a, b, c, d spełnia układ równań dany w treści zadania. Odejmujemy obustronnie równanie trzecie od czwartego, otrzymując $d = 1 - d$, co daje $d = \frac{1}{2}$. Podstawiamy tę wartość do trzech pierwszych równań i otrzymujemy układ

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2}bc \\ a+b &= \frac{1}{2}c \\ a+b+c &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Odejmujemy obustronnie równanie drugie od trzeciego i dostajemy $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c$, stąd $c = \frac{1}{3}$. Podstawiamy tę wartość do dwóch pierwszych równań powyższego układu i mamy

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{6}b \\ a+b &= \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Odejmujemy obustronnie równanie pierwsze od drugiego i otrzymujemy $b = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}b$, skąd $b = \frac{1}{7}$. Podstawiając tę wartość do pierwszego równania, otrzymujemy $a = \frac{1}{42}$. Jedynym rozwiązaniem układu jest więc czwórka liczb: $a = \dfrac{1}{42}, b = \dfrac{1}{7}, c = \dfrac{1}{3}, d = \dfrac{1}{2}$. $\square$