Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 5 lutego 2016

Zadanie 1. Przez punkt $P = (a, b)$ o dodatnich współrzędnych a, b poprowadzić prostą, która wraz z osiami układu współrzędnych tworzy trójkąt o najmniejszym polu.

Zadanie 2. Wykazać, że jeżeli liczba wszystkich podzielników liczby naturalnej n jest liczbą nieparzystą, to istnieje liczba pierwsza p taka, że p^2 dzieli n.

Zadanie 3. Dany jest czworościan foremny $ABCD$. Jak położona jest płaszczyzna o tej własności, że rzut prostokątny czworościanu na tę płaszczyznę ma największe pole.?

Zadanie 4. Wykazać, że wyrażenie

$$x^2 + 2(\sin\alpha + \cos\alpha)xy + \big(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\big)y^2$$

ma wartość nieujemną dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y i dla każdej liczby α z przedziału $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 150 minut (2,5 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.

MAŁOPOLSKA

Tarnowski Turniej Matematyczny
2015/2016
przebiega pod patronatem:
Marszałka Województwa Małopolskiego
Prezydenta Miasta Tarnowa
Rektora Państwowej Wyższej Szkoły
Zawodowej w Tarnowie

PWSZ W TARNOWIE

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 5 lutego 2016

Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Niech $O = (0, 0)$ będzie początkiem układu współrzędnych. Wybierzmy punkt $Q = (t, 0)$ na osi Ox tak, aby $t > a$. Wtedy prosta PQ przetnie oś Oy w punkcie $R = \big(0, \dfrac{bt}{t-a}\big)$. Pole trójkąta QOR wynosi $S(t) = \dfrac{bt^2}{2(t-a)}$. Zauważmy, że funkcja $t \mapsto S(t)$ osiąga wartość najmniejszą w przedziale (a, ∞), gdy $t = 2a$. Stąd szukana prosta QR przechodzi przez punkty $Q = (2a, 0)$ oraz $R = (0, 2b)$, a więc prostą tę należy poprowadzić tak, aby ustalony punkt $P = (a, b)$ był środkiem przeciwprostokątnej trójkąta QOR.

Zadanie 2. Niech $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ będzie rozkładem liczby n na czynniki pierwsze $p_1,\ p_2,\ \dots, p_k$, $p_i > 1$, gdzie $p_i \neq p_j$ dla $i \neq j$. Wiadomo, że liczba podzielników liczby n wynosi $\sigma(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Skoro $\sigma(n)$ jest liczbą nieparzystą, to znaczy, że każda z liczb $a_1 + 1,\ a_2 + 1, \dots, a_k + 1$ jest nieparzysta, czyli każda z liczb $a_1,\ a_2, \dots, a_k$ jest parzysta. Możemy więc przyjąć, że $a_1 = 2m$ jest liczbą parzystą, gdzie $m \geq 1$. Wtedy zarówno liczba p_1^m jak i p_1^{2m} dzielą liczbę n, w szczególności liczba n jest podzielna przez p_1 oraz jej kwadrat p_1^2.

Zadanie 3. Niech $A',\ B',\ C',\ D'$ będą rzutami prostokątnymi wierzchołków czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi a na pewną płaszczyznę π. Jeżeli jeden z punktów będących rzutami, np. A', leży w trójkącie, którego wierzchołkami są pozostałe rzuty $B'C'D'$, to pole rzutu czworościanu $ABCD$ jest polem rzutu jednej ze ścian, a tym samym pole to jest mniejsze lub równe $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (czyli mniejsze niż pole kwadratu o przekątnej a, które wynosi $\frac{1}{2}a^2$). W przypadku pozostałym rzut czworościanu $ABCD$ jest czworokątem o przekątnych $p = A'C'$ i $q = B'D'$. Ponieważ rzuty odcinków AC i BD nie są dłuższe niż a, a pole czworokąta nie przekracza połowy iloczynu przekątnych, zatem pole czworokąta $A'B'C'D'$ nie przekracza $\frac{1}{2}pq \leq \frac{1}{2}a^2$. Płaszczyzna równoległa do krawędzi AC i BD realizuje rzut, który jest kwadratem o przekątnej a. Rzut prostokatny czworościanu na tę płaszczyznę ma największe pole (równe $\frac{1}{2}a^2$).

Zadanie 4. Podane wyrażenie przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik

$$\Delta = 4(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 4(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha})$$

jest niedodatni, czyli wtedy, gdy dla każdej liczby α z przedziału $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$1 + \sin 2\alpha \leq \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb α z przedziału $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, ponieważ lewa strona tej nierówności nie przekracza 2:

$$1 + \sin 2\alpha \leq 2$$

zaś prawa jest niemniejsza niż 2:

$$2 \leq \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$