

# Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 27 stycznia 2017

## Zadanie 1.

Wykazać, że

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{97^2}\right) > \frac{1}{2}$$

gdzie w mianownikach ułamków po lewej stronie nierówności bierzemy kwadraty kolejnych liczb pierwszych mniejszych od stu: 2, 3, 5, ..., 89, 97.

## Zadanie 2.

Niech  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  będzie wielomianem trzeciego stopnia ( $a \neq 0$ ) o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli  $x_0$  jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu  $W(x)$ , to  $x_0$  jest liczbą wymierną.

## Zadanie 3.

Założmy, że liczby rzeczywiste  $x, u, v$  są takie, że  $x \neq 0, x+u \neq 0$  i  $x+v \neq 0$ . Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{u}{x+v} > 1 \text{ oraz } \frac{v}{x+u} > 1,$$

to

$$\frac{u+v}{x} < 0.$$

**Zadanie 4.** Wykazać, że pole trójkąta zawartego w równoległoboku nie przekracza połowy pola tego równoległoboku.

---

## Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.

# Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 27 stycznia 2017