Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 27 stycznia 2017

Zadanie 1.

Wykazać, że

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{97^2}\right)>\frac{1}{2}$$

gdzie w mianownikach ułamków po lewej stronie nierówności bierzemy kwadraty kolejnych liczb pierwszych mniejszych od stu: $2, 3, 5, \ldots, 89, 97$.

Zadanie 2.

Niech $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ będzie wielomianem trzeciego stopnia $(a \neq 0)$ o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli x_0 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x)$, to x_0 jest liczbą wymierną.

Zadanie 3.

Załóżmy, że liczby rzeczywiste x, u, v są takie, że $x \neq 0$, $x+u \neq 0$ i $x+v \neq 0$. Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{u}{x+v} > 1 \text{ oraz } \frac{v}{x+u} > 1,$$

to

$$\frac{u+v}{x} < 0.$$

Zadanie 4. Wykazać, że pole trójkąta zawartego w równoległoboku nie przekracza połowy pola tego równoległoboku.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.

Tarnowski Turniej Matematyczny 2016/2017
przebiega pod patronatem:
Marszałka Województwa Małopolskiego
Prezydenta Miasta Tarnowa
Rektora Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 27 stycznia 2017

Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Zauważmy, że $1 - \dfrac{1}{k^2} < 1$ dla dowolnej liczby naturalnej $k > 1$. Wobec tego zachodzi nierówność

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{97^2}\right) >$$
$$> \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{97^2}\right).$$

Otrzymany iloczyn czynników po prawej stronie nierówności jest zaś równy:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{97^2}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{96\cdot 98}{97\cdot 97} = \frac{1}{2}\cdot\frac{98}{97} > \frac{1}{2}.$$

Zadanie 2. Podzielmy wielomian $W(x)$ przez wielomian $(x-x_0)^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2$. Otrzymamy

$$W(x) = (x-x_0)^2[ax + b - 2ax_0] + 2xx_0(b - 2ax_0) - x_0^2(b - 2ax_0).$$

Skoro x_0 jest pierwiastkiem podwójnym $W(x)$, to reszta z dzielenia musi być wielomianem zerowym. Oznacza to w szczególności, że $2x_0(b - 2ax_0) = 0$, czyli $x_0 = 0$ lub $x_0 = \frac{b}{2a}$. Stąd x_0 jest liczbą wymierną.

Zadanie 3. Rozważmy najpierw przypadek ($\star$) $x = 1$. Wtedy założenie przyjmuje postać:

$$\frac{u}{1+v} > 1 \text{ oraz } \frac{v}{1+u} > 1.$$

Możemy mieć trzy przypadki: obie liczby $1+v$, $1+u$ są dodatnie, obie te liczby są ujemne lub są one różnych znaków.

Jeśli liczby $1+v$, $1+u$ są dodatnie, to po przekształceniu obu nierówności

$$\frac{u}{1+v} > 1 \text{ oraz } \frac{v}{1+u} > 1$$

otrzymamy $u < 1+v$ i $v < 1+u$, czyli $u-v < 1$ i $v-u < 1$, co prowadzi do sprzeczności.

Jeśli liczby $1+u$, $1+v$ są przeciwnych znaków, to bez straty ogólności możemy przyjąć, że $1+u < 0$ a $1+v > 0$. Wtedy $u < -1$. Jednocześnie $v+1 > 0$ więc skoro $\frac{u}{v+1} > 1$, to $u > 0$ i mamy sprzeczność.

Wobec tego obie liczby $1+v$ i $1+u$ są ujemne, czyli $u+v < -2$ a więc $u+v < 0$.

Rozważmy teraz sytuację ogólną. Mamy nierówności:

$$\frac{u}{x+v} > 1 \text{ oraz } \frac{v}{x+u} > 1,$$

które są równoważne nierównościom:

$$\frac{\frac{u}{x}}{1+\frac{v}{x}} > 1 \text{ oraz } \frac{\frac{v}{x}}{1+\frac{u}{x}} > 1.$$

Stosujemy ($\star$) dla $\widetilde{u} = \frac{u}{x}$ i $\widetilde{v} = \frac{v}{x}$ i otrzymujemy, że $\widetilde{u} + \widetilde{v} < 0$, czyli $\frac{u+v}{x} < 0$.

Zadanie 4. Rozważmy trójkąt T o wierzchołkach $A,\ B,\ C$ zawarty w równoległoboku R o wierzchołkach $K,\ L,\ M,\ N$. Rozważmy na wstępie przypadek $(*)$, gdy jeden z boków trójkąta T, na przykład AB, jest równoległy do jednego z boków równoległoboku R, na przykład KL. Wtedy twierdzenie jest prawdziwe. Zauważmy bowiem, że wysokość h trójkąta T opuszczona do boku AB jest niewiększa niż wysokość w równoległoboku R opuszczona do boku KL. Ponadto odcinek AB jest niedłuższy niż KL. Stąd

$$pole T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot KL \cdot w = \frac{1}{2} \cdot pole R.$$

Rozważmy następnie przypadek trójkąta T, którego żaden bok nie jest równoległy do któregokolwiek boku równoległoboku R. Rzutując wierzchołki $A,\ B,\ C$ trójkąta T na bok KN równolegle do boku KL, otrzymamy trzy różne punkty $A_1,\ B_1,\ C_1$. Jeden z nich, np. B_1, musi leżeć między dwoma pozostałymi. Prowadząc przez B_1 prostą równoległą do KL, rozcinamy trójkąt T na dwa trójkąty T_1 i T_2 oraz równoległobok R na dwa równoległoboki R_1 i R_2. Zauważamy, że pary $(T_1,\ R_1)$ i $(T_2,\ R_2)$ spełniają założenia przypadku $(*)$ rozważonego na wstępnie. Zatem $pole T_1 \leq \frac{1}{2} \cdot pole R_1$ oraz $pole T_2 \leq \frac{1}{2} \cdot pole R_2$.

Ale $pole T = pole T_1 + pole T_2$ i zarazem $pole R = pole R_1 + pole R_2$. Dodanie powyższych nierówności stronami kończy rozumowanie.