

Tarnowski Turniej Matematyczny
etap szkolny w roku 2016/17
dnia 1 grudnia 2016 r.

Szkice rozwiązań

Zadanie 1. (10 pkt.) *Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n iloczyn $mn(m - n)$ jest liczbą parzystą.*

Szkic rozwiązania: Wystarczy uzasadnić, że jedna z liczb z iloczynu jest parzysta, a tym samym zauważyć, że w przypadku gdy obie liczby m, n są nieparzyste, to ich różnica jest parzysta i wobec tego iloczyn jest podzielny przez 2.

Zadanie 2. (10 pkt.) *Wszystkie wierzchołki kwadratu $ABCD$ leżą na bokach trójkąta równobocznego KLM . Wykazać, że stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola trójkąta KLM jest mniejszy niż $\frac{\sqrt{3}}{3}$.*

Szkic rozwiązania: Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że trójkąt równoboczny KLM ma boki jednostkowe, czyli $KL = 1$. Możemy też założyć, że wierzchołki kwadratu A i B leżą na boku KL . Oznaczmy przez x bok kwadratu $ABCD$. Mamy zatem $AB = BC = CD = DL = x$ oraz $AK = LB = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Z równości $KA + AB + BL = 1$, czyli $\frac{x}{\sqrt{3}} + x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 1$, wynika, że $\frac{1}{x^2} = \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$. Mamy zatem pokazać, że stosunek pola kwadratu x^2 do pola trójkąta $\frac{\sqrt{3}}{4}$ jest mniejszy niż $\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub – równoważnie – że $\frac{\sqrt{3}}{4x^2} > \sqrt{3}$. Nierówność $\frac{1}{4x^2} > 1$, czyli $\frac{7}{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} > 1$, zachodzi, gdyż $\sqrt{3} < \frac{12}{5}$, bowiem $3 < \frac{144}{25}$.

Zadanie 3. (10 pkt.) *Zbiór kolejnych liczb naturalnych od 1 do 9 podzielono na trzy trójelementowe podzbiory A, B, C . Iloczyn liczb w tych zbiorach oznaczamy symbolami: a, b, c , odpowiednio. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest większa lub równa 72.*

Szkic rozwiązania: Przypuśćmy, że dziewięć liczb naturalnych od 1 do 9 podzielono na trójelementowe podzbiory A, B, C takie, że iloczyn elementów w każdym z nich (tj. a, b, c) jest mniejszy niż 72. Żadna z liczb a, b, c nie może być równa 71, stąd każda z tych liczb jest nie większa niż 70. Mamy zatem:

$$70^3 \geq abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

Prowadzi to do nierówności $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \geq 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, czyli do nierówności $35^2 \geq 36^2$, która jest fałszywa. Podział $A = \{1, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 6\}$, $C = \{2, 5, 7\}$ pokazuje, że liczby 72 nie da się zastąpić w zadaniu przez większą liczbę naturalną.

Zadanie 4. (10 pkt.) *Wielokąt wypukły W ma środek symetrii. Pokazać, że istnieje rodzina równoległoboków $R_1, R_2, \dots, R_k$ o rozłącznych wnętrzach taka, że:*

(α) *każdy punkt wielokąta W należy do co najmniej jednego z równoległoboków tej rodziny; (β) każdy z równoległoboków R_i jest zawarty w wielokącie W .*

Szkic rozwiązania: Wielokąt W ma środek symetrii, ma więc parzystą liczbę wierzchołków. Oznaczmy je literami $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{2n}$. Rozważmy następującą

konstrukcję. Łamaną $L := A_{n+1}A_{n+2}\dots A_{2n}$ przesuwamy równolegle o wektor $A_{2n}A_1$ i otrzymujemy łamaną $L' := A'_{2n}A'_{2n-1}\dots A'_{n+1}$, w której $A_1 = A'_{2n}$ oraz $A'_{n+1} = A_n$. Łamana L' wraz z łamaną $A_1A_2\dots A_n$ ogranicza wielokąt W' . Wielokąt W' ma nadal boki parami równoległe, więc jest środkowosymetryczny i ma mniej boków. Wielokąt W^* ograniczony odcinkami $A_{2n}A_1$ i $A_{n+1}A_n$ oraz łamaną L i L' jest zawarty w wielokącie W i daje się podzielić na równoległoboki o rozłącznych wnętrzach. Po skończonej liczbie powtórzeń opisanej konstrukcji (co najwyżej $n - 2$ krotnie) otrzymujemy tezę twierdzenia.

Tarnowski Turniej Matematyczny w roku 2016/17
 odbywa się pod patronatem
 Marszałka Województwa Małopolskiego
 Prezydenta Tarnowa
 Małopolskiego Kuratorium Oświaty
 Rektora Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie