Zadania finału 4 edycji TTM (rok szk. 2017/2018)

Zadanie 1. Rozpatrujemy zbiór liczb czterocyfrowych postaci:

$$N = 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$

o następujących własnościach:

- N jest kwadratem liczby naturalnej;
- dwucyfrowa liczba $N_1 = 10a_3 + a_2$ jest kwadratem liczby naturalnej;
- dwucyfrowa liczba $N_0 = 10a_1 + a_0$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Wykazać, że jest tylko jedna taka liczba.

Rozwiązanie. Umawiamy się, że *termin liczba dwucyfrowa* oznacza, iż cyfra dziesiątek tej liczby jest różna od 0. Z warunków zadania wynika, że istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $k^2 = 10a_3 + a_2$. Tym samym $0 < k < 10$ oraz $(10k)^2 = 100k^2 = 10^3 a_3 + 10^2 a_2$ jest kwadratem liczby naturalnej. Ponieważ rozważana liczba $N = 100k^2 = 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$ jest też kwadratem, zatem $N = (10k + p)^2$ dla pewnego naturalnego $p \geqslant 1$. Stąd

$$N = 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = (10k + p)^2 = (10k)^2 + 20kp + p^2 > 20kp.$$

Stąd $20kp < 81$ bo $10a_1 + a_0$ jest dwucyfrowym kwadratem. Zatem $k \leqslant 4$. Ponieważ $3^2 = 9$ jest liczbą jednocyforwą, więc $k = 4$ i zarazem $p = 1$. Poszukiwaną liczbą jest więc $N = 1691$.

Zadanie 2. Dane są trzy liczby rzeczywiste p, q, r. Wykazać, że

$$p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 \geqslant pqr(p + q + r).$$

Rozwiązanie. Po przeniesieniu wszystkich wyrażeń na lewą stronę, pomnożeniu obustronie przez 2 oraz pogrupowaniu otrzymamy nierówność równoważną

$$p^2q^2 - 2pq^2r + q^2r^2 + q^2r^2 - 2pqr^2 + r^2p^2 + r^2p^2 - 2p^2qr + p^2q^2 \geqslant 0.$$

Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia otrzymujemy

$$(pq - qr)^2 + (qr - rp)^2 + (rp - pq)^2 \geqslant 0,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3. Punkty A_1, B_1, C_1 są punktami styczności koła wpisanego w trójkąt ABC z jego bokami. Wykazać, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest ostrokątny.

Rozwiązanie. Niech α oznacza miarę kąta przy wierzchołku A i niech O oznacza środek koła wpisanego. Czworokąt AB_1OC_1 jest wpisany w okrąg, zatem kąt B_1OC_1 ma miarę $180 - \alpha$ i jest to kąt środkowy. Zatem kąt wpisany $B_1A_1C_1$ ma miarę $90 - \frac{\alpha}{2}$ jest więc ostry. Analogicznie pokazujemy dla pozostałych kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD ma długość m i dzieli przeciwprostokątną AB na dwa odcinki takie, że stosunek ich długości wynosi m. Pole trójkąta ABC jest równe 20. Oblicz m.

Rozwiązanie. Przy oznaczeniach, jak w zadaniu, trójkąty ADC i CDB są podobne. Niech $BD = x$. Z podobieństwa otrzymujemy proporcję

$$x : m = m : mx$$

skąd otrzymujemy $x = \sqrt{m}$. Zatem pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{\sqrt{m} \cdot m \cdot (m + 1)}{2}.$$

Prowadzi to równania

$$\sqrt{m} \cdot m \cdot (m + 1) - 40 = 0,$$

a stąd po podstawieniu $\sqrt{m} = z$ otrzymujemy równanie

$$z^5 + z^3 - 40 = 0.$$

Równanie to ma pierwiastek $z = 2$. Po podzieleniu przez $z - 2$ otrzymujemy równanie

$$z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 10z + 20 = 0,$$

które nie ma pierwiastów dodatnich. Stąd jedynie $m = 2$.