Rozwiązania zadań etapu szkolnego 4 edycji TTM (rok szk. 2017/2018)

1. Wykazać, że dla każdego trójkąta istnieje prostokąt o takim samym polu i mniejszym obwodzie.

   Rozwiązanie. Niech boki danego trójkąta mają długości a, b, c. Niech h będzie długością wysokości opuszczonej na bok długości a. Zauważmy, że prostokąt o bokach długości $\frac{1}{2}a$ oraz h ma pole równe polu danego trójkąta. Wykażemy, że prostokąt ten ma obwód mniejszy od obwodu danego trójkąta, co zakończy rozwiązanie zadania. Rzeczywiście, z określenia wysokości h wynika, że $h \leqslant b$ oraz $h \leqslant c$ przy czym obie równości nie mogą zachodzić jednocześnie, czyli
$$2h < b + c.$$
   Oznacza to, że
$$Obw(prost.) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + h + h < a + b + c = Obw(trojk.),$$
   ckd.

2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na półprostej CA wybrano punkty A_1, A_2 zaś na półprostej CB wybrano punkty B_1, B_2 w ten sposób, że długości odcinków A_1B_1, A_2B_2, AB są równe. Na zewnątrz kąta ACB wybrano punkty C_1, C_2 w ten sposób, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoboczne. Wykazać, że punkty C, C_1, C_2 leżą na jednej prostej.

   Rozwiązanie. Rozważymy dwa istotnie różne przypadki.

   1. Punkty C_1, C_2 leżą po tej samej stronie prostej BC. Bez straty ogólności nie będzie to strona po której nie leży punkt A. Wtedy z równości $\angle A_2CB_2 = \angle A_2C_2B_2 = 60°$ wynika, że punkty A_2, C, C_2, B_2 leżą na jednym okręgu. Zatem $\angle C_2CB_2 = \angle C_2A_2B_2 = 60°$. Analogicznie z równości $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1 = 60°$ wynika, że punkty A_1, C, C_1, B_1 leżą na jednym okręgu. Zatem $\angle C_1CB_1 = \angle C_1A_1B_1 = 60°$. Wobec tego $\angle BCC_1 = \angle BCC_2 = 60°$, co dowodzi współliniowości punktów C, C_1, C_2.

   2. Punkty C_1, C_2 leżą po różnych stronach prostej BC. Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt C_1 leży po tej samej stronie co punkt A. Wtedy z równości $\angle A_2CB_2 = \angle A_2C_2B_2 = 60°$ wynika, że punkty A_2, C, C_2, B_2 leżą na jednym okręgu. Zatem $\angle C_2CB_2 = \angle C_2A_2B_2 = 60°$. Analogicznie z równości $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1 = 60°$ wynika, że punkty A_1, C, C_1, B_1 leżą na jednym okręgu. Zatem $\angle C_1CB_1 = 180° - \angle C_1A_1B_1 = 120°$. Zatem $\angle BCC_1 + \angle BCC_2 = 60° + 120° = 180°$, co również dowodzi współliniowości punktów C, C_1, C_2. Dowód został zatem zakończony.

3. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $(x_n)_1^\infty$ taki, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność
$$x_{n+1}^2 > x_n \cdot x_{n+2}.$$
   Wykazać, że jeżeli $1 \leqslant t < p < q$, to
$$\frac{x_p}{x_q} > \frac{x_{p-t}}{x_{q-t}}.$$

   Rozwiązanie. Pokażemy najpierw, że jeżeli $1 < p < q$, to
$$\frac{x_p}{x_q} > \frac{x_{p-1}}{x_{q-1}}. \tag{1}$$
   Nierówność ta jest równoważna nierówności
$$\frac{x_p}{x_{p-1}} > \frac{x_q}{x_{q-1}},$$
   gdyż wyrazy danego ciągu są dodatnie. Z założeń mamy
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}.$$
   Niech $q = p + k$. Wtedy na mocy ostatniej nierówności mamy
$$\frac{x_p}{x_{p-1}} > \frac{x_{p+1}}{x_p} > ... > \frac{x_{p+k}}{x_{p+k-1}} = \frac{x_q}{x_{q-1}},$$

co dowodzi (1).

Stosując nierówność (1) t razy

$$\frac{x_p}{x_q} > \frac{x_{p-1}}{x_{q-1}} > \frac{x_{p-2}}{x_{q-2}} > ... > \frac{x_{p-t}}{x_{q-t}},$$

dostajemy tezę.

4. Znaleźć rozwiązania nierówności

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że dane równanie posiada rozwiązanie niezerowe (różne od $(0, 0, 0)$). Niech $\Re$ będzie zbiorem wszystkich takich rozwiązań. Niech (x_0, y_0, z_0) będzie rozwiązaniem z $\Re$ o najmniejszej sumie $|x_0| + |y_0| + |z_0|$. Suma ta jest oczywiście dodatnia. Takie rozwiązanie istnieje na mocy zasady minimum oraz niepustości zbioru niezerowych rozwiązań.

Zauważmy teraz, że kwadrat liczby całkowitej w dzieleniu przez 7 może dawać jedynie reszty 0, 1, 2, 4. Zatem, aby suma kwadratów liczb całkowitych dzieliła się przez 7 obie te liczby muszą dzielić się przez 7. Oznacza to, że x_0 oraz y_0 dzielą się przez 7. Niech $x = 7x_1, y = 7y_1$, gdzie x_1, y_1 to liczby całkowite. Podstawiając do danego w treści równania otrzymujemy

$$49x_1^2 + 49y_1^2 = 7z^2,$$

co oznacza, że liczba z również dzieli się przez 7, czyli $z = 7z_1$. Oznacza to, że

$$49x_1^2 + 49y_1^2 = 7 \cdot 49z_1^2,$$

czyli po obustronnym podzieleniu przez 49 mamy

$$x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2.$$

Wynika stąd, że $(x_1, y_1, z_1) \in \Re$, ale

$$0 < |x_1| + |y_1| + |z_1| < |x_0| + |y_0| + |z_0|,$$

co przeczy minimalności sumy $|x_0| + |y_0| + |z_0|$. Oznacza to, że dane równanie nie posiada niezerowych rozwiązań. Pozostaje zauważyć, że trójka $(0, 0, 0)$ spełnia dane równanie. Jest to zatem jedyne rozwiązanie tego równania.

(mr)