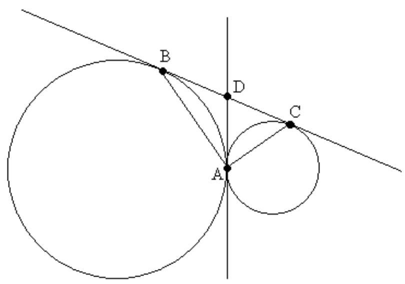
# *Rozwiązania zadań etapu szkolnego piątej edycji Tarnowskiego Turnieju Matematycznego (rok szkolny 2018/2019)*

1. *Do dwóch okręgów stycznych zewnętrznie w punkcie $A$ poprowadzono wspólną styczną zewnętrzną $BC$, gdzie $B$ i $C$ są punktami styczności. Wykaż, że kąt $BAC$ jest kątem prostym.*

**Rozwiązanie.** *Poprowadźmy styczną zewnętrzną do danych okręgów przechodzącą przez punkt $A$. Styczna ta przecina styczną $BC$ w punkcie $D$.*

*Zauważamy, że na mocy twierdzenia o stycznych do okręgu poprowadzonych z jednego punktu zewnętrznego mamy równości*

$$AD = BD \ \text{ i } \ AD = CD.$$




*Oznacza to, że punkt $D$ jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty $A, B, C$ oraz $BC$ jest średnicą tego okręgu. Kąt $BAC$ jest kątem wpisanym opartym na średnicy $BC$, czyli kątem prostym.*

2. *Rozwiązać równanie* $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$ *, w którym* $[a]$ *oznacza cechę liczby $a$, natomiast* $\{x\} = a - [a]$.

**Rozwiązanie:** *Zauważmy, że lewa strona równania jest liczbą całkowitą, a więc* $\{x\} = 0$. *Zatem $x$ jest liczbą całkowitą i nasze równanie ma postać* $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. *Po rozłożeniu wielomianu na czynniki otrzymujemy równanie* $(x+1)(x^2+1) = 0$, *a zatem jedynym rozwiązaniem jest* $x = -1$.

3. *Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a; b; c; d; e takie, że* $a + b + c + d + e = 8$ *oraz* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ . *Wykaż, że* $a \leq \frac{16}{5}$.

**Rozwiązanie**. *Przekształcając powyższe tożsamości otrzymujemy*

$$b + c + d + e = 8 - a \quad \text{oraz} \quad b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16 - a^2 .$$

*Zauważmy, że wykorzystując nierówność między średnią kwadratową, a arytmetyczną uzyskamy następujące oszacowanie*

$$16 - a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{(b+c+d+e)^2}{4} = \frac{(8-a)^2}{4}.$$

*Po przeniesieniu na lewą stronę mamy nierówność*

$$5a^2 - 16a \leq 0,$$

*ckd.*

4. Niech $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Oblicz

5. $f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$.

***Rozwiązanie.*** *Zauważmy, że grupując odpowiednie powyższej sumy (pierwszy z ostatnim,* drugi z *przedostatnim, itd. ...) otrzymujemy tożsamość:*

$$f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2019}\right),$$

*którą uogólniając zapisujemy w postaci* $f(x) + f(1-x)$.
*Policzmy ile wynosi powyższa suma*

$$f(x) + f(1-x) = \frac{2}{4^x+2} + \frac{2}{(4^{1-x}+2)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (4^{1-x}+2)}{(4^x+2) \cdot (4^{1-x}+2)} + \frac{2 \cdot (4^x+2)}{(4^x+2) \cdot (4^{1-x}+2)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4^{1-x} + 4 + 2 \cdot 4^x + 4}{4 + 2 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{1-x} + 4} = 1$$

*Zatem*

$$f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) = 1009.$$