

# Tarnowski Turniej Matematyczny

etap szkolny w roku 2020/21

dnia 26 listopada 2020r.

**Zadanie 1.** Uzasadnij, że suma

$$7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2020}$$

jest podzielna przez 8.

**Zadanie 2.** Niech ABCDE będzie pięciokątem wypukłym. Dwieścienne sąsiednich kątów zewnętrznych tego pięciokąta przecinają się w punktach K, L, M, N i P. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych pięciokąta ABCDE wiedząc, że wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta KLMNP mają równe miary.

**Zadanie 3.** Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \end{cases}.$$

**Zadanie 4.** Wiadomo, że trójkąt o bokach długości  $3a$ ,  $3b$  i  $3c$  można pokryć dwudziestoma pięcioma kołami o promieniu 3. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe (odpowiedź uzasadnij):

- (A) Równoległobok o bokach długości  $2a$  i  $2b$ , którego jedna z przekątnych ma długość  $2c$ , można pokryć 200 kołami o promieniu 1.
- (B) Trapez o podstawach długości  $6a$  i  $4a$  oraz o ramionach długości  $2b$  i  $2c$  można pokryć 500 kołami o promieniu 1.

**Zadanie 5.** Wykaż, że jeżeli współczynniki równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$  są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to równanie to nie ma pierwiastków wymiernych.

**Zadanie 6.** Każdy wypukły  $n$ -kąt ( $n \geq 4$ ) można podzielić przekątnymi na trójkąty (na różne sposoby). Znajdź charakterystykę takich  $n$ -kątów, dla których – niezależnie od sposobu podziału przekątnymi na trójkąty – promienie okręgów wpisanych we wszystkie trójkąty otrzymane w wyniku danego podziału mają jednakową długość.

## Informacje dla uczestnika zawodów

1. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
2. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
3. **Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.** Każdy arkusz należy **podpisać (drukowanymi literami)** imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
4. Przed upływem czasu należy zeskanować lub wykonać czytelne zdjęcia rozwiązań zadań i przesłać je w (jednym) podpisanym e-mailu na adres, z którego otrzymali Państwo zadania.
5. Orginaly prac należy dostarczyć do swojej szkoły w zaklejonej i opisanej kopercie w terminie do 2 grudnia 2020r.