Tarnowski Turniej Matematyczny

etap szkolny w roku 2020/21
dnia 26 listopada 2020r.

Zadanie 1. Uzasadnij, że suma

$$7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2020}$$

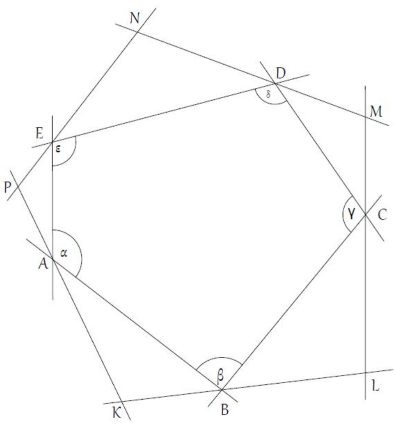
jest podzielna przez 8.

Szkic rozwiązania: Liczba składników jest parzysta, więc połączymy je w pary postaci $7^i + 7^{i+1} = 7^i \cdot (1+7)$ dla $i = 1, 3, 5, ..., 2019$. Zauważmy, że każda z tych par dzieli się przez 8, a więc suma również dzieli się przez 8.

Drugi sposób polega na badaniu reszt z dzielenia przez 8 potęg liczby siedem i zauważeniu, że potęgi „parzyste" dają resztę 1, a „nieparzyste" resztę 7. Po zsumowaniu wszystkich reszt otrzymamy resztę zero.

Zadanie 2. Niech ABCDE będzie pięciokątem wypukłym. Dwusieczne sąsiednich kątów zewnętrznych tego pięciokąta przecinają się w punktach K, L, M, N i P. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych pięciokąta ABCDE wiedząc, że wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta KLMNP mają równe miary.

Szkic rozwiązania: Sporządźmy rysunek ilustracyjny:



Skoro w pięciokącie KLMP wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, to każda z nich jest równa $\frac{(5-3)\cdot 180^o}{5} = 108^o$. Przy oznaczeniach jak na rysunku w trójkącie ABK mamy

$$|\measuredangle BAK| = \frac{1}{2}(180^o - \alpha) = 90^o - \frac{\alpha}{2},$$

$$|\measuredangle ABK| = \frac{1}{2}(180^o - \beta) = 90^o - \frac{\beta}{2},$$

$$|\measuredangle AKB| = 108^o,$$

więc

$$90^o - \frac{\alpha}{2} + 90^o - \frac{\beta}{2} + 108^o = 180^o,$$

skąd

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 108^o,$$

czyli

$$\alpha + \beta = 216^o.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \varepsilon = \varepsilon + \alpha = 216^o.$$

Skoro $\alpha+\beta = \beta+\gamma$, to $\alpha = \gamma$ i podobnie uzyskujemy ciąg równości $\alpha = \gamma = \varepsilon = \beta = \delta$. Wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta ABCDE są więc równe, a każdy z nich musi mieć miarę 108^o.

Zadanie 3. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \end{cases}.$$

Szkic rozwiązania:
Mnożąc pierwsze równanie przez 2 otrzymujemy

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0.$$

Wystarczy zauważyć, że lewą stronę można przedstawić jako sumę kwadratów

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0.$$

Oznacz to, że każdy składnik powyższej sumy jest równy zero, czyli $x = y = z$. Uwzględniając otrzymaną zależność w drugim równaniu otrzymujemy $3x^3 = 3x$. Równanie to ma trzy rozwiązania $x = 1, x = -1, x = 0$. Zatem dany w treści zadania układ również ma trzy rozwiązania: $x = y = z = 1, x = y = z = -1, x = y = z = 0$.

Zadanie 4. Wiadomo, że trójkąt o bokach długości $3a$, $3b$ i $3c$ można pokryć dwudziestoma pięcioma kołami o promieniu 3. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe (odpowiedź uzasadnij):

(A) Równoległobok o bokach długości $2a$ i $2b$, którego jedna z przekątnych ma długość $2c$, można pokryć 200 kołami o promieniu 1.

(B) Trapez o podstawach długości $6a$ i $4a$ oraz o ramionach długości $2b$ i $2c$ można pokryć 500 kołami o promieniu 1.

Szkic rozwiązania: Rozważmy obraz przez jednokładność o skali 1/3 trójkąta o bokach długości $3a, 3b, 3c$ oraz dwudziestu pięciu pokrywających go kół o promieniach długości 3. Uzyskany obraz to trójkąt o bokach długości a, b, c oraz dwadzieścia pięć pokrywających go kół o promieniach długości 1.
Ponieważ przekątna długości $2c$ dzieli rozważany równoległobok na dwa trójkąty o bokach długości $2a, 2b, 2c$, a każdy z nich można podzielić na cztery trójkąty o bokach długości $2a, 2b, 2$c (przy pomocy odcinków łączących środki sąsiednich boków), więc cały trapez można podzielić na osiem trójkątów o bokach długości a, b, c.
Ponieważ równoległobok o bokach długości $2a$ i $2b$, którego jedna z przekątnych ma długość $2c$ można „rozparcelować” na 8 trójkątów o bokach długości a, b, c, a każdy z nich (z osobna) można pokryć dwudziestoma pięcioma kołami o promieniu długości 1, więc równoległobok ten można pokryć $8 \cdot 25 = 200$ kołami o promieniu długości 1.
Można zauważyć, że trapez o podstawach długości $6a$ i $4a$ oraz o ramionach długości $2b$ i $2c$ daje się „rozparcelować” na 5 trójkątów o bokach długości $2a, 2b, 2c$. W tym celu wystarczy rozważyć odcinki poprowadzone z końców oraz środka podstawy długości $4a$, które są równoległe do jednego z ramion oraz analogiczne odcinki równoległe do drugiego z ramion. W konsekwencji rozważany trapez można podzielić na 20 trójkątów

o bokach długości a, b, c. Następnie można zastosować rozumowanie analogiczne jak dla równoległoboku.

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli współczynniki równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to równanie to nie ma pierwiastów wymiernych.

Szkic rozwiązania: Zauważmy, że $a = 2k+1$, $b = 2m+1$, $c = 2n+1$, gdzie $k, n, m \in \mathbb{N}$, bo a, b, c są liczbami nieparzystmi. Niech $\frac{p}{q}$ będzie pierwiastkiem wymiernym równania, przy czym zakładamy, że liczby p i q są względnie pierwsze, bo jeśli nie, to skracamy ułamek. Po podstawieniu do równania otrzymujemy:

$$(2k+1)\frac{p^2}{q^2} + (2m+1)\frac{p}{q} + 2n + 1 = 0.$$

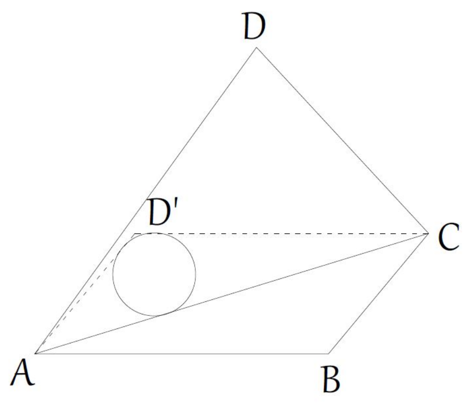
Przekształcając równanie otrzymujemy

$$2(kp^2 + mpq + nq^2) + p^2 + q^2 + pq = 0.$$

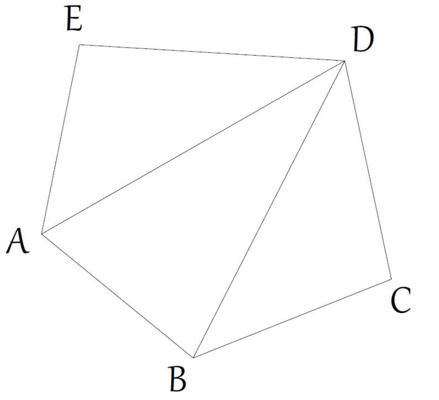
Aby lewa strona równała się prawej, liczba p^2+q^2+pq musi być parzysta, czyli podzielna przez dwa. Ponieważ liczby p i q są względnie pierwsze, więc są dwie możliwości: albo p i q są nieparzyste, albo jedna z liczb p i q jest parzysta, a druga nieparzysta (w tym przypadku nie jest istotne która jest jaka). W żadnym z tych przypadków liczba $p^2 + q^2 + pq$ nie jest parzysta, czyli równość nie może zachodzić.

Zadanie 6. Każdy wypukły n-kąt ($n \geqslant 4$) można podzielić przekątnymi na trójkąty (na różne sposoby). Znajdź charakteryzację takich n-kątów, dla których – niezależnie od sposobu podziału przekątnymi na trójkąty – promienie okręgów wpisanych we wszystkie trójkąty otrzymane w wyniku danego podziału mają jednakową długość.

Szkic rozwiązania: Zacznijmy od $n = 4$.
Czworokątem, który na pewno spełnia warunki zadania, jest równoległobok, gdyż po podzieleniu go dowolną przekątną otrzymujemy dwa trójkąty przystające (cecha bbb) i okręgi wpisane w te trójkąty mają równe promienie.
W czworokącie, który nie jest równoległobokiem, przekątne nie połowią się, więc wśród wierzchołków znajdziemy taki, który leży bliżej przekątnej, niż wierzchołek przeciwny, np. wierzchołek B:



Rozważając równoległobok $ABCD'$ widzimy, że promień okręgu wpisanego w trójkąty ABC i ACD' jest mniejszy, niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ACD, zatem taki czworokąt $ABCD$ nie spełnia warunku zadania.
Przypadek $n = 5$.
Gdyby istniał pięciokąt $ABCDE$ spełniający warunki zadania, to np. dla podziału jak na rysunku

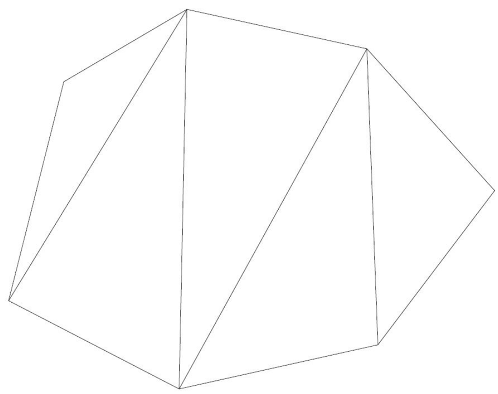


czworokąty $ABCD$ i $ABDE$ musiałyby być równoległobokami. Wtedy

$$ED||AB||CD,$$

co jet niemożliwe w wielokącie wypukłym.

Przypadek $n > 5$.
Gdyby istniał podział n-kąta przekątnymi, który spełniałby warunki zadania, to usuwając jeden z „bocznych" trójkątów podziału:



uzyskalibyśmy $(n-1)$-kąt, którego podział spełnia warunki zadania. Powtarzając operację usuwania wierzchołków $(n-5)$-krotnie uzyskalibyśmy pięciokąt z podziałem spełniającym warunki zadania, co – jak wiemy – nie jest możliwe.

Zatem jedynymi n-kątami spełniającym warunki zadania są równoległoboki.