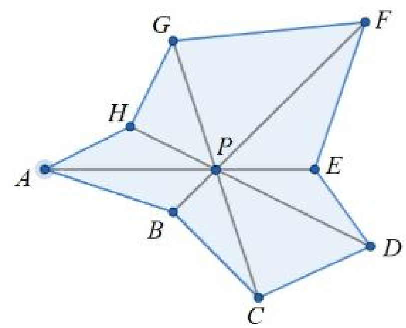
Szkice rozwiązań zadań z etapu szkolnego

VIII edycji Tarnowski Turniej Matematyczny

Zadanie 1. Dany jest taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, w którym przekątne AE, BF, CG i DH mają długość 1 i przecinają się w jednym punkcie. Wykaż, że obwód tego ośmiokąta jest mniejszy od 8.

Niech przekątne AE, BF, CG i DH tego ośmiokąta przecinają się w punkcie P.



Wtedy z nierówności trójkąta mamy

$$|AB| < |AP| + |PB|,$$

$$|BC| < |BP| + |PC|,$$

$$|CD| < |CP| + |PD|,$$

$$|DE| < |DP| + |PE|,$$

$$|EF| < |EP| + |PF|,$$

$$|FG| < |FP| + |PG|,$$

$$|GH| < |GP| + |PH|,$$

$$|HA| < |HP| + |PA|.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy:

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| + |FG| + |GH| + |HA| <$$

$$|AP|+|PB|+|BP|+|PC|+|CP|+|PD|+|DP|+|PE|+$$
$$+|EP|+|PF|+|FP|+|PG|+|GP|+|PH|+|HP|+|PA|,$$

czyli obwód

$$ABCDEFGH < 2(|AE|+|BF|+|CG|+|DH|) = 8.$$

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia

$$a = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{2021^2}\right).$$

Zauważmy, że

$$1-\frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{2^2-1}{2\cdot 2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$
$$1-\frac{1}{9} = \frac{9-1}{9} = \frac{3^2-1}{3\cdot 3} = \frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3},$$

...

$$1-\frac{1}{2020^2} = \frac{2020^2-1}{2020^2} = \frac{2020^2-1}{2020\cdot 2020} = \frac{(2020-1)(2020+1)}{2020\cdot 2020)} = \frac{2019}{2020}\cdot\frac{2021}{2020},$$
$$1-\frac{1}{2021^2} = \frac{2021^2-1}{2021^2} = \frac{2021^2-1}{2021\cdot 2021} = \frac{(2021-1)(2021+1)}{2021\cdot 2020} = \frac{2020}{2021}\cdot\frac{2022}{2021}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$a = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot \ldots \cdot\frac{2019}{2020}\cdot\frac{2021}{2020}\cdot\frac{2020}{2021}\cdot\frac{2021}{2021} = \frac{1011}{2021}.$$

Zadanie 3. Symbolem $[a]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od a. Rozwiąż równanie

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]\cdot\left[x+\frac{2}{3}\right] = 2\cdot[x].$$

Należy rozważyć przypadki w zależności od tego, do którego z przedziałów należy liczba $b = x - [x]$ (czyli część ułamkowa, inaczej: mantysa liczby x). Oznaczmy $[x] = k \in \mathbb{Z}$.

(1) Jeśli $b \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, to $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$ oraz $\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x]$, mamy więc $k^2 = 2k$, skąd $k = 0$ lub $k = 2$; w tym przypadku

$$x \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[2; 2\frac{1}{3}\right).$$

(2) Jeśli $b \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, to $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$ oraz $\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x] + 1$, mamy więc $k(k+1) = 2k$, skąd $k = 0$ lub $k = 1$. Mamy teraz

$$x = k + 1 \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}\right).$$

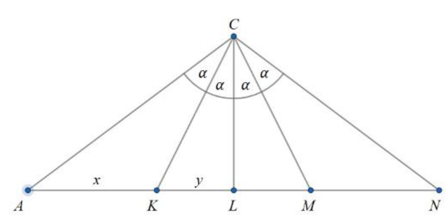
(3) Jeśli $b \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, to $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + 1$ oraz $\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x] + 1$, mamy zatem $(k + 1)^2 = 2k$, czyli $k^2 + 1 = 0$. To równanie nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych, więc nie istenieją wartości x spełniające badane równanie.

Ostatecznie rozwiązaniami są liczby

$$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}\right) \cup \left[2; 2\frac{1}{3}\right).$$

Zadanie 4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 16$ oraz $|AC| = |BC| = 10$. Przez wierzchołek C tego trójkąta poprowadzono trzy proste przecinające bok AB w punktach K, L, M. Proste te podzieliły kąt wewnętrzny trójkąta przy wierzchołku C na cztery kąty przystające. Wyznacz długości odcinków $|CK|$, $|CL|$ i $|CM|$.

Sposób 1.



Ponieważ $|AC| = |CB| = 10$, to trójkąt ABC jest równoramienny. Wówczas odcinek CL zawarty w dwusiecznej kąta ACB jest wysokością tego trójkąta i zawiera się w symetralnej boku AB, a więc $\triangle ALC$ jest prostokątny, zaś $|AL| = \frac{1}{2}|AB| = 8$. Z tw. Pitagorasa dla $\triangle ALC$ otrzymujemy $|CL| = 6$.

Ponieważ odcinek CK jest zawarty w dwusiecznej kąta ACL w trójkącie ALC, z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie mamy (przy oznaczeniach jak na rysunku)

$$\frac{x}{y} = \frac{|AC|}{|CL|} = \frac{5}{3}$$

oraz

$$x + y = 8.$$

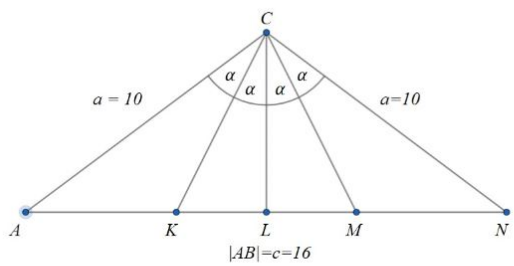
Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x + y = 8 \end{cases}$$

otrzymujemy $x = 5$, $y = 3$. Teraz z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle KLC$ mamy $|CK| = 3\sqrt{5}$, a ze względu na symetrię względem prostej CL także

$$|CM| = |CL| = 3\sqrt{5}.$$

Sposób 2.



Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABC mamy

$$c^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 4\alpha,$$

$$256 = 200 - 200 \cos 4\alpha,$$

skąd $\cos 4\alpha = -\frac{7}{25}$.
Ponieważ równocześnie $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$, mamy $-\frac{7}{25} = 2\cos^2 2\alpha - 1$, skąd $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ (gdyż $2\alpha < 90^o$).

Trójkąt ACL jest prostokątny (gdyż odcinek CL jako zawarty w dwusiecznej kąta między ramionami w trójkącie równoramiennym jest wysokością trójkąta ABC), więc

$$\frac{|CL|}{|AC|} = \cos 2\alpha,$$

skąd

$$|CL| = 6.$$

Podobnie $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, skąd $\frac{3}{5} = 2\cos^2\alpha - 1$ i $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $(\alpha < 90^o)$. W trójkącie prostokątnym KLC mamy

$$\cos\alpha = \frac{|CL|}{|CK|} = \frac{2}{sqrt5},$$

skąd

$$|CL| = 3\sqrt{5}.$$

Analogicznie otrzymujemy $|CM| = 3\sqrt{5}$.

UWAGA: Można łączyć sposoby 1. i 2., tj. wyznaczyć $|CL|$ jak w sposobie 1. , następnie wyznaczyć $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ i dalej rozumować jak w sposobie 2.

Zadanie 5. Czy istnieje taka liczba naturalna dodatnia n, dla której liczba

$$A = \frac{7^n - 1}{6^n - 1}$$

jest liczbą całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

Rozważmy przypadki.

(1) Gdy n jest liczbą parzystą, tj $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to ponieważ $6 \equiv -1$ $(mod\ 7)$, mamy

$$6^n - 1 \equiv 6^{2k} - 1 \equiv (-1)^{2k} - 1 \equiv 0\ (mod\ 7),$$

a więc $7|6^n - 1$. Gdyby A miało byc liczbą całkowitą, musiałoby także być $7|7^n - 1$, co jest niemożliwe dla $n \in \mathbb{N}_+$.

(2) Zauważmy, że ponieważ $6 \equiv 1$ $(mod\ 5)$, to

$$6^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv\ 0\ (mod\ 5),$$

a więc $5|6^n - 1$. Żeby liczba A była całkowita, musi być także spełniony warunek $5|7^n - 1$. Wobec **(1)** wystarczy rozważyć tylko liczby nieparzyste.

(2.1) Dla $n = 4k + 1$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mamy

$$7^n - 1 \equiv (7^2)^{2k} \cdot 7 - 1 \equiv (-1)^{2k} \cdot 7 - 1 \equiv\ 1\ (mod\ 5),$$

a więc 5 nie dzieli $7^n - 1$.

(2.2) Dla $n = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mamy

$$7^n - 1 \equiv (7^2)^{2k} \cdot 7^3 - 1 \equiv (-1)^{2k} \cdot 343 - 1 \equiv\ 2\ (mod\ 5),$$

a więc 5 nie dzieli $7^n - 1$.

Wobec powyższego nie istnieje taka liczba naturalna n, dla której $A = \frac{7^n-1}{6^n-1}$ jest liczbą całkowitą.